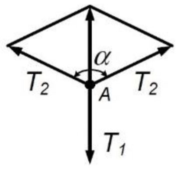
Задания и ответы олимпиады по физике «Юные таланты»
Очный этап
10 класс
7 октября 2015 г.

Задача 1. Петля (*5 баллов*)
На круглую в сечении перекладину надета петля из тонкой легкой однородной нити. К петле с помощью невесомого крюка A на такой же тонкой нити подвешен груз, который постепенно увеличивают до разрыва нити. Определите, при каких значениях угла α (см. рисунок) порвется петля, а при каких нить, соединяющая груз с крюком.

Ответ:
При угле $\alpha < 120°$ порвется нить, соединяющая груз с крюком, при угле $\alpha > 120°$ порвется петля.

Решение

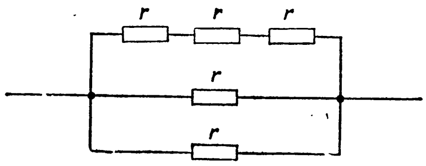
Запишем уравнение для проекций сил на вертикальную ось (см. рисунок)



$$2T_2\cos\frac{\alpha}{2} = T_1,$$

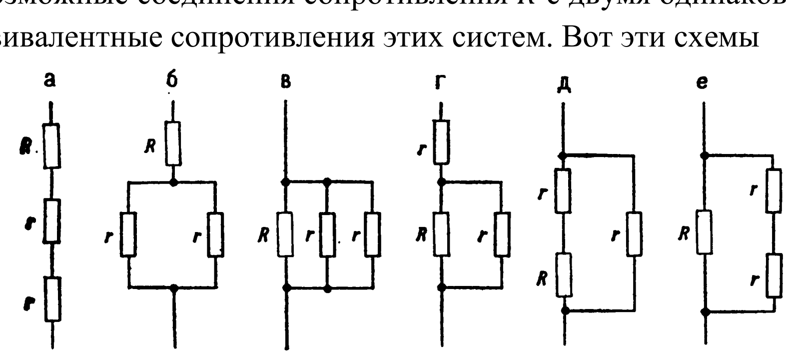
Найдем угол, при котором натяжения T_1 и T_2 равны: $\cos\frac{\alpha_0}{2} = \frac{1}{2}$, откуда $\alpha_0 = \frac{2\pi}{3} = 120°$. При угле $\alpha < \alpha_0$ натяжение $T_1 > T_2$ и разрыв будет ниже точки А, т.е. порвется нить, соединяющая груз с крюком. При угле $\alpha > \alpha_0$ натяжение $T_1 < T_2$ и нить порвется выше точки А, т.е. в этом случае порвется петля.

Задача 2. Цепь (*10 баллов*)
Три одинаковых резистора r соединены в одну цепь, сопротивление которой равно R. При подключении к этой цепи как целому еще двух резисторов r сопротивление цепи уменьшается в семь раз. Нарисуйте схему соединения всех пяти резисторов.
Ответ:



Решение

Исследуем все возможные соединения сопротивления R с двумя одинаковыми резисторами r и подсчитаем эквивалентные сопротивления этих систем. Вот эти схемы



Для каждой из них с учетом условия задачи запишем уравнения:

а) $R+2r=\frac{R}{7}$,   б) $R+\frac{r}{2}=\frac{R}{7}$,   в) $\frac{1}{R}+\frac{1}{r}+\frac{1}{r}=\frac{7}{R}$,

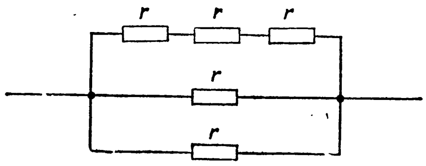
г) $r+\frac{Rr}{R+r}=\frac{R}{7}$,   д) $\frac{1}{R+r}+\frac{1}{r}=\frac{7}{R}$,   е) $\frac{1}{R}+\frac{1}{2r}=\frac{7}{R}$,

которые имеют следующие решения:

а) $R=-\frac{7}{3}r$,   б) $R=-\frac{7}{12}r$,   в) $R=3r$,

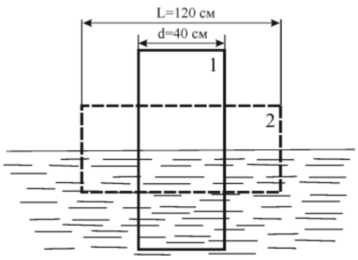
г) $R=\frac{13\pm\sqrt{197}}{2}r$,   д) $R=\frac{5\pm\sqrt{53}}{2}r$,   е) $R=12r$.

Решения **а), б)** и решения **г), д)** со знаком «-» мы отбрасываем, т.к. сопротивление R не может быть отрицательным. Решение **е)** и решения **г), д)** со знаком «+» тоже исключаем, т.к. сопротивление R не может быть больше $3r$. Остается вариант **в)** $R=3r$, т.е. схема подключения резисторов выглядит следующим образом



Задача 3. Бревно (*10 баллов*)

Деревянное бревно цилиндрической формы плавает, наполовину погрузившись в воду. Найдите количество тепла (в джоулях), выделяющееся при его опрокидывании из неустойчивого вертикального положения 1 в устойчивое горизонтальное положение 2, если масса бревна $m=10$ кг. Ускорение свободного падения $g=10$ м/с^2.



Ответ: $Q=mg(l-d)/4=20$ Дж

Решение:

Так как бревно свободно плавает, масса вытесненной им воды равна массе бревна m. После опрокидывания бревна центр масс вытесненной воды поднялся на высоту

$$(l-d)/4.$$

Центр масс бревна остался на уровне поверхности воды. Из закона сохранения энергии кол-во выделившегося тепла равно убыли потенциальной энергии воды

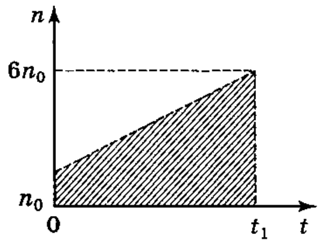
$$Q=mg(l-d)/4=20 \text{ Дж}$$

Задача 4. Сосуд Дьюара (*15 баллов*)

Сосуд Дьюара представляет собой сосуд с двойными стенками, в пространстве между которыми поддерживается высокий вакуум. В процессе заполнении сосуда Дьюара жидким азотом, находящимся при температуре кипения, была нарушена герметичность внешней стенки сосуда. Весь азот испарился из сосуда за время t_1 = 5 ч, при этом концентрация молекул воздуха между стенками возросла в 6 раз, в то же время оставаясь такой, что молекулы воздуха могут пролетать от стенки до стенки практически без соударений друг с другом. Оцените, за какое время t_2 эта же масса азота испарилась бы из неповрежденного сосуда. Поступлением тепла через горловину сосуда и излучением можно пренебречь.

Ответ: $t_2=\frac{7}{2}t_1$ = 17,5 ч.

Решение:



При высоком вакууме молекулы свободного газа пролетают от одной стенки к другой, не сталкиваясь друг с другом, и переносят энергию непосредственно от одной стенки к другой. При постоянной разности температур ΔT стенок, что имеет место в нашем опыте, тепловой поток, пропорциональный $n\Delta T$, будет изменяться только вследствие изменения концентрации молекул воздуха между стенками сосуда. Так как в единицу времени в сосуд втекает одно и то же количество воздуха, концентрация является линейной функцией времени $n = n_0 + \alpha t$. Коэффициент пропорциональности α определим из условия $6n_0 = n_0 + \alpha t_1$, откуда $\alpha = 5n_0/t_1$.

Азот будет испаряться за счет теплового потока между стенками сосуда. За малый промежуток времени Δt_i испарится азот массы Δm:

$$Q\Delta t_i = L\Delta m_i,$$

$$\mu\Delta T n(t_i)\Delta t_i = L\Delta m_i,$$

$$\mu\Delta T\sum_{i=1}^{N} n(t_i)\,\Delta t_i = ML.$$

Здесь M – масса азота в сосуде, L – удельная теплота испарения азота, Q – тепловой поток, μ – коэффициент пропорциональности, N – число малых промежутков времени Δt_i. Площадь фигуры под графиком зависимости $n(t)$ равна

$$S = \sum_{i=1}^{N} n(t_i)\,\Delta t_i = \frac{n_0 + 6n_0}{2} t_1 = \frac{7}{2} n_0 t_1,$$

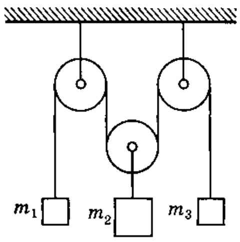
$$\mu\Delta T\frac{7}{2} n_0 t_1 = LM$$

Для неповрежденного сосуда $n = n_0$. Тогда $\mu\Delta T n_0 t_2 = LM$.. Окончательно $t_2 = \frac{7}{2} t_1$ = 17,5 ч.

Задания и ответы олимпиады по физике «Юные таланты»
Очный этап
11 класс
7 октября 2015 г.

Задача 1. Система блоков (*10 баллов*)

Система грузов с массами m_1 = 1 кг, m_2 = 2 кг, m_3 = 4 кг изображена на рисунке. Трение отсутствует, а массы блоков и нитей пренебрежимо малы. В каких направлениях и с какими ускорениями станут двигаться грузы?



Ответ: $a_1 = \frac{3}{13}g$, направлено вверх, $a_2 = \frac{3}{13}g$, направлено вверх, $a_3 = \frac{9}{13}g$, направлено вниз.

Решение:

Нить нерастяжима и невесома, значит, сила натяжения T по всей длине нити одинаковая. Запишем II закон ньютона для каждого из грузов в проекции на вертикальную ось:

$$m_1 a_1 = m_1 g - T,$$
$$m_2 a_2 = m_2 g - 2T,$$
$$m_3 a_3 = m_3 g - T.$$

Запишем кинематическое условие связи для ускорений, исходя из условия нерастяжимости нити:

$$a_2 = -\frac{a_1 + a_3}{2}$$

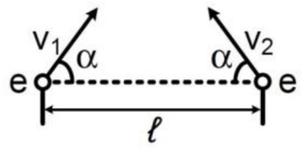
Решая совместно эти уравнения, найдем:

$$T = \frac{4gm_1m_2m_3}{4m_1m_3 + m_1m_2 + m_2m_3},$$
$$a_1 = g\frac{4m_1m_3 + m_1m_2 - 3m_2m_3}{4m_1m_3 + m_1m_2 + m_2m_3},$$
$$a_2 = g\frac{-4m_1m_3 + m_1m_2 + m_2m_3}{4m_1m_3 + m_1m_2 + m_2m_3},$$
$$a_1 = g\frac{4m_1m_3 - 3m_1m_2 + m_2m_3}{4m_1m_3 + m_1m_2 + m_2m_3},$$

Окончательно получим $a_1 = \frac{3}{13}g$, направлено вверх, $a_2 = \frac{3}{13}g$, направлено вверх, $a_3 = \frac{9}{13}g$, направлено вниз.

Задача 2. Два электрона (*10 баллов*)

Скорости двух электронов $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ лежат в одной плоскости и при расстоянии l между электронами образуют углы α с прямой, соединяющей электроны (см. рисунок). На какое минимальное расстояние сблизятся электроны, если скорости $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ равны по модулю v? Заряд электрона равен e, масса равна m.



Ответ: $r_{\min} = l\left[1 + \frac{4\pi\varepsilon_0}{e^2} lm\mathrm{v}^2\cos^2\alpha\right]^{-1}$

Решение

Для каждого электрона сохраняется компонента импульса на направление, перпендикулярное прямой, соединяющей электроны:

$m\mathrm{v}\sin\alpha = \mathrm{const}.$

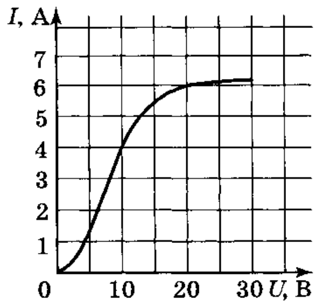
С учетом этого соотношения закон сохранения энергии можно записать следующим образом:

$$\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 l} + 2\frac{m\mathrm{v}^2}{2} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_{\min}} + 2\frac{m\mathrm{v}^2\sin^2\alpha}{2}.$$

Откуда получаем

$$r_{\min} = l\left[1 + \frac{4\pi\varepsilon_0}{e^2} l m\mathrm{v}^2\cos^2\alpha\right]^{-1}$$

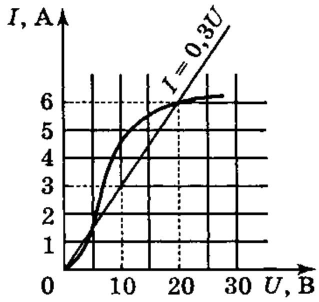
Задача 3. Нелинейный элемент (*10 баллов*)



Последовательно с резистором сопротивлением R = 10 Ом соединены лампа и источник тока. Зависимость силы тока от напряжения на лампе представлена на рисунке. При каком напряжении сети КПД схемы равно 25%? КПД схемы равен отношению мощности, потребляемой лампой, к мощности, потребляемой от сети.

Ответ: 20 и 80 В.

Решение:



Пусть I – сила тока в цепи, U – напряжение на лампе. Согласно определению КПД

$$\eta = \frac{UI}{UI + RI^2} = 0{,}25.$$

Отсюда $I = 0{,}3U$. Это уравнение прямой в координатах $I - U$, проходящей через начало координат. Построив ее на графике, находим две точки пересечения. Таким образом, возможны два решения:

1) I_1 = 1,5 А, U_1 = 5 В, $U_{1C} = U_1 + I_1R$ = 20 В

2) I_2 = 6 А, U_2 = 20 В, $U_{2C} = U_2 + I_2R$ = 80 В

Здесь U_{1C} и U_{2C} – напряжения сети в этих двух случаях.

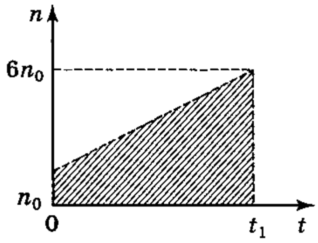
Задача 4. Сосуд Дьюара (*15 баллов*)

Сосуд Дьюара представляет собой сосуд с двойными стенками, в пространстве между которыми поддерживается высокий вакуум. В процессе заполнении сосуда Дьюара жидким азотом, находящимся при температуре кипения, была нарушена герметичность внешней стенки сосуда. Весь азот испарился из сосуда за время t_1 = 5 ч, при этом концентрация молекул воздуха между стенками возросла в 6 раз, в то же время оставаясь такой, что молекулы воздуха могут пролетать от стенки до стенки практически без соударений друг с другом. Оцените, за какое время t_2 эта же масса азота испарилась бы из неповрежденного сосуда. Поступлением тепла через горловину сосуда и излучением можно пренебречь.

Ответ: $t_2 = \frac{7}{2}t_1$ = 17,5 ч.

Решение:

При высоком вакууме молекулы свободного газа пролетают от одной стенки к другой, не сталкиваясь друг с другом, и переносят энергию непосредственно от одной стенки к другой. При постоянной разности температур ΔT стенок, что имеет место в нашем опыте, тепловой поток, пропорциональный $n\Delta T$, будет изменяться только вследствие изменения концентрации молекул воздуха между стенками сосуда. Так как в единицу времени в сосуд втекает одно и то же количество воздуха, концентрация является линейной функцией времени $n = n_0 + \alpha t$. Коэффициент пропорциональности α определим из условия $6n_0 = n_0 + \alpha t_1$, откуда $\alpha = 5n_0/t_1$.



Азот будет испаряться за счет теплового потока между стенками сосуда. За малый промежуток времени Δt_i испарится азот массы Δm:

$$Q\Delta t_i = L\Delta m_i,$$

$$\mu\Delta T n(t_i)\Delta t_i = L\Delta m_i,$$

$$\mu\Delta T \sum_{i=1}^{N} n(t_i)\,\Delta t_i = ML.$$

Здесь M – масса азота в сосуде, L – удельная теплота испарения азота, Q – тепловой поток, μ – коэффициент пропорциональности, N – число малых промежутков времени Δt_i. Площадь фигуры под графиком зависимости $n(t)$ равна

$$S = \sum_{i=1}^{N} n(t_i)\,\Delta t_i = \frac{n_0 + 6n_0}{2} t_1 = \frac{7}{2} n_0 t_1,$$

$$\mu\Delta T \frac{7}{2} n_0 t_1 = LM$$

Для неповрежденного сосуда $n = n_0$. Тогда $\mu\Delta T n_0 t_2 = LM.$. Окончательно $t_2 = \frac{7}{2} t_1$ = 17,5 ч.